Übungen zu Mathematik I

Blatt 4

Aufgabe 1: Stellen Sie $\vec{d}$ als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar! Ist dies auf eindeutige Art und Weise möglich? Begründen Sie Ihre Antwort!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Lösung: Wir können das folgende Gleichungssystem aufstellen:

$$\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} = \vec{d}\,.$$

Wir erhalten: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$ und $\lambda_3 = 4$. Diese Darstellung ist eindeutig, da das zugehörige Gleichungssystem eindeutig lösbar war.

Aufgabe 2: Gegeben sind folgende Vektoren im $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{a}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 := \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{a}_3 := \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Stellen Sie den Vektor

$$\vec{a} := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ dar.

Lösung: Zur Bestimmung der Faktoren, können wir ein Gleichungssystem aufstellen:

$$\lambda \vec{a}_1 + \mu \vec{a}_2 + \nu \vec{a}_3 = a\,.$$

Als Lösung erhalten wir z.B. $\lambda = 2$, $\mu = 1$ und $\nu = -1$. Da die Lösung nicht eindeutig ist, existieren natürlich noch viele andere mögliche Linearkombinationen.

Aufgabe 3: Untersuchen Sie, ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) Das zugehörige Gleichungssystem besitzt nur die triviale Lösung, bzw. die Determinante hat den Wert -3, daher sind die Vektoren linear unabhängig.

b) Das zugehörige Gleichungssystem besitzt unendlich viele Lösungen, bzw. die Determinante verschwindet, daher sind die Vektoren linear abhängig.

c) Das zugehörige Gleichungssystem besitzt unendlich viele Lösung, bzw. die Determinante verschwindet, daher sind die Vektoren linear abhängig.

Aufgabe 4: Für welche $t \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Vektoren linear unabhängig?

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 3 \\ t \\ 11 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung: Wir betrachten das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcl} \lambda & + & 3\mu & - & \nu & = & 0 \\ 3\lambda & + & t\mu & - & 4\nu & = & 0 \\ 4\lambda & + & 11\mu & & & = & 0 \end{array}$$

Nach einigen Umformungen erhalten wir z.B.

$$\begin{array}{rcrcrcl} \lambda & + & 3\mu & - & \nu & = & 0 \\ & & \mu & - & 4\nu & = & 0 \\ & & & & (37-4t)\nu & = & 0 \end{array}$$

Damit die Vektoren linear unabhängig sind, darf als Ergebnis nur die triviale Lösung herauskommen, d.h. es muss gelten: $37 - 4t \neq 0$. Daher sind die Vektoren für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t \neq 37/4$ linear unabhängig.

Aufgabe 5: Es sei $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ die Standardbasis. Untersuchen Sie ob die folgenden Systeme von Vektoren linear unabhängig sind. Spannen Sie den $\mathbb{R}^3$ auf? Bilden sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort!

a) $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2\}$

b) $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3\}$

c) $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_2\}$

Lösung:

a) Da im $\mathbb{R}^3$ maximal nur drei Vektoren linear unabhängig sein können und wir vier Vektoren im System vorliegen haben, kann das System nicht linear unabhängig sein.

   Da Basisvektoren immer linear unabhängig sein müssen, liegt auch keine Basis vor.

   Wir haben jedoch ein Erzeugendensystem, da die ersten drei Vektoren als Standardbasis schon den $\mathbb{R}^3$ aufspannen.

b) Die drei Vektoren sind linear unabhängig, was leicht z.B. durch explizites Aufschreiben überprüft werden kann.

   Da die Dimension des $\mathbb{R}^3$ drei ist und drei linear unabhängige Vektoren immer eine Basis bilden, liegt auch eine Basis vor.

   Jede Basis bildet automatisch ein Erzeugendensystem.

c) Die Vektoren sind linear abhängig, da der dritte Vektor die Summe der ersten beiden Vektoren im System ist.

   Damit kann keine Basis vorliegen, da hier die Vektoren linear unabhängig sein müssen.

   Es liegt auch kein Erzeugendensystem vor, da in allen drei Vektoren in der letzten Komponente eine null steht. Somit können Vektoren wie z.B. $\vec{e}_3$ nicht als Linearkombination der drei Systemvektoren geschrieben werden.

Aufgabe 6: Wir wollen das Dreieck, das aus den Punkten $A = (2, 1)$, $B = (4, 3)$ und $C = (4, 1)$ besteht an der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten spiegeln. Dazu verwenden wir die Matrix

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und multiplizieren die zu den Punkten zugehörigen Vektoren mit der Matrix. Führen Sie diese Multiplikation aus und zeichnen Sie anschließend das Dreieck und das gespiegelte Dreieck in ein Koordinatensystem.

Die Determinante von H gibt an, wie sich die Fläche unter der zugehörigen Abbildung (Spiegelung) verändert. Welchen Wert vermuten Sie? Berechnen Sie die Determinante und vergleichen Sie.

Lösung: Wir multiplizieren wie folgt:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Da sich die Fläche bei Spiegelungen nicht ändert, erwarten wir den Wert eins. Wir erhalten aber minus eins, was daran liegt, dass eine Spiegelung seitenverkehrt ist.

Aufgabe 7: Wir betrachten den Materialverpflechtungsplan in Abb. 1. Stellen Sie die zugehörigen Matrizen auf, d.h. die Matrix A, welche den Zusammenhang der drei Ressourcen R_1, R_2 und R_3 mit den beiden Zwischenprodukten Z_1 und Z_2 beschreibt und die Matrix B, welche den Zusammenhang der Zwischenprodukte mit den beiden Endprodukten E_1 und E_2 beschreibt. Berechnen Sie daraus die Matrix, welche den direkten Zusammenhang zwischen Ressourcen und Endprodukten beschreibt. Wie viele Ressourcen werden benötigt, um 30 Mengeneinheiten vom Produkt E_1 und 25 von E_2 herzustellen?

Lösung: Wir stellen die Situation in zwei Tabellen dar (Abb. 2), wobei in den Spalten die benötigten Mengen der entsprechenden Vorprodukte stehen. Die Matrix A ergibt sich aus Tabelle a) und die Matrix B aus Tabelle b). Die Matrix, welche direkt den Zusammenhang zwischen Ressourcen und Endprodukten beschreibt erhalten wir durch Multiplizieren:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 41 \\ 17 & 32 \\ 13 & 22 \end{pmatrix}$$

Die benötigten Ressourcen erhalten wir dann durch Multiplikation dieser Matrix mit dem Vektor aus den Vorgaben:

$$\begin{pmatrix} 22 & 41 \\ 17 & 32 \\ 13 & 22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1685 \\ 1310 \\ 940 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 8: Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

Ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar? Bestimmen Sie die Lösungsmenge.

Lösung: Da die Determinante $\det(A) = 0$ ist, ist das System nicht eindeutig lösbar. Abhängig von der rechten Seite kann es unendlich viele Lösungen geben oder keine. Wir rechnen mit Gauss und erhalten unendlich viele Lösungen:

$$L = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; : \; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 9: Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$, sodass die Lösungsmenge des linearen Gleichungssy-

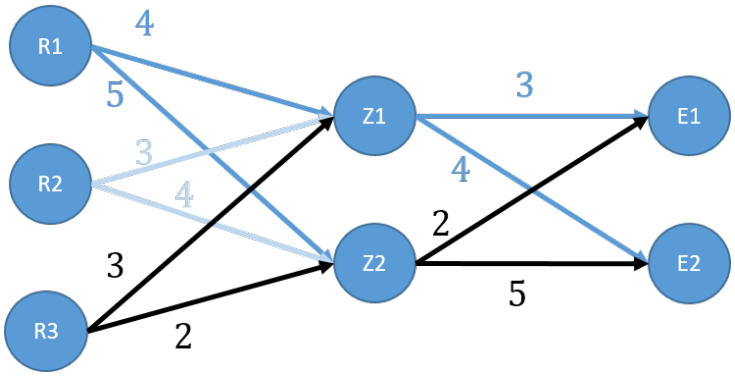


Abbildung 1: Materialverpflechtungsplan zu Aufgabe 2

stems nicht leer ist. Geben Sie in diesem Fall auch die Lösungsmenge an:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & & & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & + & 2x_5 & = & -1 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & & & = & 0 \\ & & & & -x_3 & & & + & x_5 & = & a \end{array}$$

Lösung: Durch Umformungen erhalten wir:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & & & = & 1 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & & & = & 0 \\ & & & & 2x_3 & & & - & 2x_5 & = & 2 \\ & & & & & & & & 0 & = & 2a+2 \end{array}$$

Die letzte Zeile ergibt nur Sinn, wenn $2a + 2 = 0$ ist. In diesem Fall existieren unendlich viele Lösungen. Umformung ergibt $a = -1$. Für den Fall $a \neq -1$ ist das System also nicht lösbar. Die Lösungen erhalten wir schließlich, indem wir $x_5 = t_1$ und $x_4 = t_2$ setzen und dann eine Rückwärtselimination durchführen. Dies ergibt die Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \mid x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a)

	Z1	Z2
R1	4	5
R2	3	4
R3	3	2

(b)

	E1	E2
Z1	3	4
Z2	2	5

Abbildung 2: (a) Zusammenhang von Ressourcen und Zwischenprodukten und (b) von Zwischenprodukten und den Endprodukten zu Aufgabe 2